Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Definitions- und Wertebereiche** mit Lösungen
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1) Für welche reellen Zahlen sind die folgenden Funktionen jeweils definiert?

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$,

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-6x+8}$,

d) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^3-4x}$,

e) $f(x) = \dfrac{1}{x+|x|}$,

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{2|x|-3}$.

g) $f(x) = \dfrac{|x+2|+1-2x-2x^2}{|2x+2|-1}$.

Lösung.
Zur Bestimmung des Definitionsbereichs einer Funktion muss man im Prinzip nur sicherstellen, dass nichts "verbotenes" zu rechnen versucht wird. Dabei sind Operationen gemeint, die nicht definiert sind oder aus dem Zielgereich der Funktion führen würden. Klassiker dabei sind Teilung durch Null (diese Aufgabe) und das Ziehen von Wurzeln mit geradem Exponent aus negativen Zahlen (Aufgabe 2).

a) Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$,

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$,

e) $D = \mathbb{R}_{>0}$,

f) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

g) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.

□

Aufgabe 2 (1) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$,

b) $f(x) = \sqrt{-x^2}$,

c) $f(x) = \sqrt[4]{2-x}$,

d) $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$,

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt[6]{x^2-1}}{x}$,

g) $f(x) = \dfrac{x}{(9-x^2)^{2/3}}$,

h) $f(x) = \sqrt{x^2(x-2)}$,

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$.

Lösung.

a) $D = \mathbb{R}$,

b) $D = \emptyset$,

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

d) $D = [-2, 1]$,

e) $D = (-1, 1)$,

f) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$,

g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$,

h) $D = [2, \infty)$,

i) $D = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup [3, \infty)$.

$\square$

Aufgabe 3 (2) Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der Funktionen f_1, f_2 und $f_1 + f_2$ für

a) $f_1(x) = \sqrt[4]{3-x}, \quad f_2(x) = \sqrt{x+1};$

b) $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}};$

c) $f_1(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-3}, \quad f_2(x) = \ln(x^2-4);$

d) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}}, \quad f_2(x) = \tan x;$

e) $f_1(x) = \ln(16-x^2), \quad f_2(x) = \dfrac{1}{1-\sin x};$

f) $f_1(x) = x + \sqrt{x-1}, \quad f_2(x) = x - \sqrt{x-1}.$

Aufgabe 4 (2) Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der Funktionen f und $1/f$ für

a) $f(x) = x^2 - 1 + 1,$

b) $f(x) = |x| - 2,$

c) $f(x) = \ln(1-x^2),$

d) $f(x) = x + \sqrt{x+2},$

e) $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1},$

f) $f(x) = 5^x - 2^{x+1},$

g) $f(x) = 3 - 2\cos x,$

h) $f(x) = \sqrt{2} - 2\sin x,$

i) $f(x) = 1 - \cot x.$

Aufgabe 5 (1) Bestimmen Sie die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ sowie deren Definitionsbereiche.

a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x};$

b) $f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2};$

c) $f(x) = 10^x, \quad g(x) = \ln x;$

d) $f(x) = x^5, \quad g(x) = x + 5;$

e) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,\infty), \\ 0, & x \in (-\infty, 0), \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty, 0); \end{cases}$

f) $f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = \sin x.$

Aufgabe 6 (2) Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen beschränkt sind.

a) $f(x) = x^2 - x - 1, \; x \in [-1, 5];$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-10}, \; x \in [0, 5];$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+1}, \; x \in \mathbb{R};$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^4+10}}{x^2+1}, \; x \in \mathbb{R};$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x^3-1|}, \; x \in \mathbb{R}, \; x \neq 1;$

f) $f(x) = \dfrac{3x^2+6x+10}{\sqrt{0{,}1x^4+1}}.$

Aufgabe 7 (2) Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen beschränkt sind.

a) $f(x) = 10^{-|x|}$,

b) $f(x) = 0{,}3^{x^2-1}$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(2 + x^4)}$,

d) $f(x) = \ln_4(x^2 + 5) - \log_2(1 + |x|)$,

e) $f(x) = \left(\log_{10} x + \log_x 10\right)^{-1}$.